

MAGIA GRAFÓW – ABSTRAKCYJNE MODELE SYTUACJI PROBLEMOWYCH

Anna Beata Kwiatkowska
Wydział Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu
87-100 Toruń, ul. Chopina 12/18
aba@mat.umk.pl

Abstract. *In the current computer science core curriculum, one of the topics is graphs, which are used to represent an abstract model of problem situations. This topic, at first glance, turns out to be one of the most interesting topics for students, inspiring them to model real situations from the world around us.*

1. Wstęp

Zagadnienia związane z grafami kojarzą nam się z trudnymi algorytmami, które muszą znać olimpijczycy, jeśli chcą osiągać sukcesy na zawodach. Okazuje się jednak, że w obowiązującej podstawie programowej kształcenia rozszerzonego oczekuje się od każdego ucznia, że będzie potrafił objaśnić, a także porównać podstawowe metody i techniki algorytmiczne oraz struktury danych, wykorzystując przy tym przykłady problemów i algorytmów, a w szczególności będzie umiał zastosować grafy do przedstawiania abstrakcyjnego modelu sytuacji problemowej. Celem tej pracy jest pokazanie, że temat ten nie tylko może być poruszany w kształceniu rozszerzonym, ale na każdym etapie edukacji i z wszystkimi uczniami. Wszystko za sprawą tego, że prawie każdą sytuację problemową możemy najpierw zwizualizować, a później przedstawić w sposób abstrakcyjny z pomocą grafu.

Za ojca Teorii grafów uważa się Leonarda Eulera, jednego z najwybitniejszych w historii nauk ścisłych, szwajcarskiego matematyka i fizyka. Zajmował się naukowo rachunkiem różniczkowym, analizą matematyczną, mechaniką, optyką, astronomią. Był uczniem Bernoulliego i trafił do Królewca zastępując jednego z jego synów w prowadzeniu wykładów dla studentów. Dzięki temu w 1736 roku napisał pierwszą pracę na temat teorii grafów, a jej historia była taka...

2. Pierwszy model grafowy sytuacji problemowej

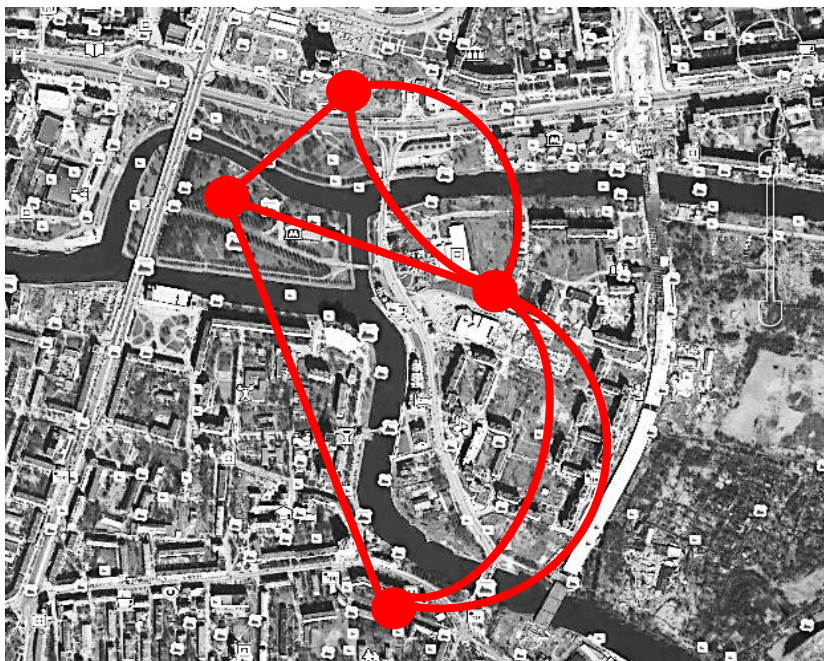
Euler, podczas swojego pobytu w Królewcu sporo spacerował. Dzięki temu szybko odkrył, że przez przepływającą przez miasto rzekę Pregolę przechodzi wiele mostów. Dziś patrząc na mapę Królewca np. w Google map widzimy osiem mostów, za czasów Eulera było ich siedem, bez mostu w samym środku zdjęcia 1.

Euler nieco nudząc się, zaczął się zastanawiać nad odpowiedzią na następujące pytanie:

Czy można wystartować z wybranego miejsca, przejść przez każdy most tylko raz i wrócić do miejsca, z którego się wyruszyło?

Z początku spacerował ulicami miasta i przez mosty, jednak trasa była długa. Postanowił więc stworzyć abstrakcyjny model swojego problemu i rozważać go teoretycznie. Oznaczył łądy kropkami (wierzchołki) i wprowadził połączenia między nimi (krawędzie) odpowiadające mostom łączącym te łądy. Otrzymał strukturę nazwał grafem. Teraz swoje pytanie mógł sformułować dla tego grafu:

Czy można wystartować z wybranego wierzchołka, przejść przez każdą krawędź dokładnie raz i wrócić do wierzchołka początkowego?

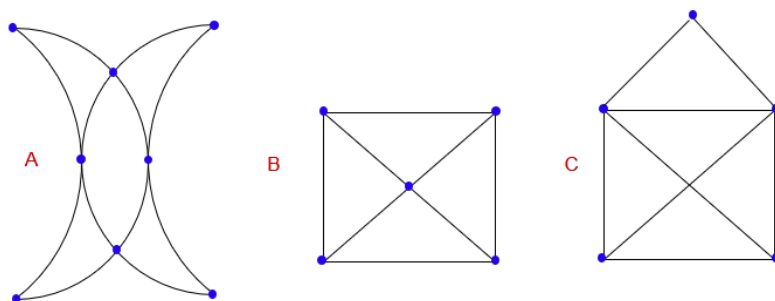


Rysunek 1. Zdjęcie współczesne Królewca z Google map z modelem grafu (kolor czerwony) dla problemu sformułowanego przez Eulera [4]

Zachęcam czytelników do próby znalezienia takiej drogi oraz zastanowienia się nad odpowiedzią na pytanie, kiedy jest to możliwe?

Zanim przejdziemy do odpowiedzi na to pytanie zauważmy, że jest bardzo dużo takich sytuacji z różnych dziedzin, dla których możemy utworzyć model abstrakcyjny w postaci grafu.

Każdy z nas z pewnością w dzieciństwie próbował narysować figurę bez odrywania ołówka od kartki papieru, przechodząc przez każdą linię dokładnie raz. Można zapytać nie tylko o to, czy, ale również kiedy można to zrobić. Rozważmy przykładowe kształty poniżej. Na każdy kształt patrzymy jak na graf, w którym widoczne są wierzchołki i krawędzie.



Rysunek 2. Przykładowe kształty do ćwiczenia rysowania figur bez odrywania ołówka od kartki

Problemy dotyczące mostów i rysowania na kartce są podobne, ale jednak się różnią. Zauważmy, że w Królewcu Euler zadał pytanie, czy możemy wrócić do miejsca początkowego. Przy rysowaniu na kartce, takiego wymagania nie ma. W przypadku mostów szukamy zatem tzw. cyklu Eulera, czyli drogi zamkniętej, w przypadku rysowania na kartce szukamy drogi Eulera, która nie musi być drogą zamkniętą.

Aby daną sytuację problemową zamodelować za pomocą grafu, musimy określić, co reprezentują wierzchołki i kiedy są połączone krawędziami. Poniżej przedstawione są przykłady takich przyporządkowań (wierzchołki – krawędzie) dla różnych problemów:

Problemy społecznościowe:

- uczeń - kolega
- osoba – znajomość
- aktor – rola w tym samym filmie
- naukowiec – wspólny projekt

Problemy informacyjne:

- internet – hiperłącza

- publikacja naukowa – prace z cytataми

Problemy transportowe:

- miasta – drogi

- samoloty – linie lotnicze

- dworzec kolejowy – tory

Problemy natury biologicznej:

- gatunek – pożywienie

- białko – reakcja chemiczna

Problemy dotyczące sprzedaży

- sklep – połączenia w sieci sklepów między miastami

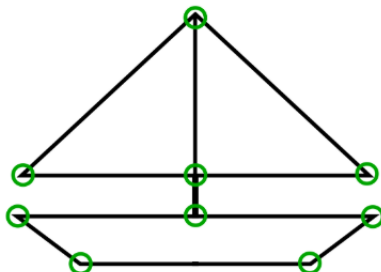
- hurtownia – zaopatrzenie sklepu

3. Odpowiedź na pytania o cykl i drogę Eulera

Szukając cyklu Eulera, za każdym razem, gdy wychodzimy z wierzchołka krawędzią, musimy wrócić do niego inną krawędzią. Zatem liczba krawędzi związanych z wierzchołkiem (tzw. stopień wierzchołka) musi być liczbą parzystą. W przypadku szukania drogi Eulera jedynymi wierzchołkami, których stopień może być liczbą nieparzystą jest startowy i końcowy, bo do pierwszego na starcie nie wchodzimy, a z ostatniego już nie wychodzimy. Kryteria te są łatwe do odgadnięcia. Uczeń który zna takie kryterium znacznie szybciej rozwiąże zadania konkursowe, np. takie jak to z XIX Konkursu Informatycznego Bóbr:

Zosia otrzymała od kolegi rysunek żagłówki wraz z zadaniem: ma poprawić kredką wszystkie linie na rysunku zgodnie z następującymi zasadami:

- nie może oderwać kredki od kartki,
- nie może poprawić dwa razy tej samej linii.



Od którego miejsca oznaczonego zielonym kółkiem Zosia powinna zacząć poprawiać linie? Kliknij odpowiednie miejsce.

Rysunek 3. Zadanie Żagłówka z XIX Konkursu Informatycznego Bóbr w kategorii Skrzat

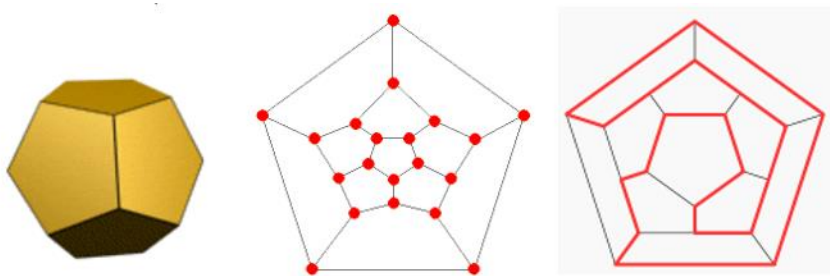
4. Łamigłówka Hamiltona

Sir Wiliam Hamilton, irlandzki matematyk, astronom i fizyk, w pierwszej połowie dziewiętnastego wieku sformułował inną zagadkę, którą można przedstawić z pomocą grafu. W 1859 roku wymyślił grę, do której użył dwunastościanu foremego. Taka bryła ma dwadzieścia wierzchołków i każdy z tych wierzchołów oznaczał miasto, np. Londyn, New York, Paryż... między którymi można było przemieszczać się po krawędziach bryły. Gra polegała na tym, że pierwszy z graczy oznaczał pięć kolejnych miast na drodze, a drugi miał dodawać kolejne miasta tak, aby wyznaczyć drogę przechodzącą przez każde miasto dokładnie raz i wrócić do miasta pierwszego. Hamilton zyskał tą zagadką pewną popularność. Uruchomił nawet produkcję takich dwunastościanów foremnych z drewna...

Grę tę można zamodelować za pomocą grafu zbudowanego na siatce bryły, gdzie miasta (wierzchołki bryły), to wierzchołki grafu, a drogi (krawędzie bryły) między miastami to krawędzie grafu.

Problem Hamiltona zawarty w pytaniu poniżej nazywa się poszukiwaniem cyklu Hamiltona w grafie i można go sformułować tak:

Czy można wystartować z wybranego wierzchołka grafu, przejść przez każdy wierzchołek dokładnie raz i wrócić do wierzchołka początkowego?

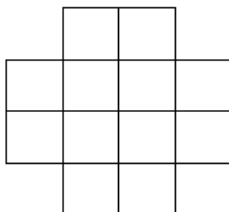


Rysunek 4. Od lewej: dwunastościan foremny, jego siatka i przykładowy cykl Hamiltona [1]

Czy potrafimy znaleźć odpowiedź na pytanie, czy i kiedy jest to możliwe? Po doświadczeniach z cyklem Eulera można przypuszczać, że znów łatwo znajdziemy kryterium, tymczasem okazuje się, że jeszcze nikt nie odpowiedział na to pytanie! Wiadomo jednak, że w niektórych rodzajach grafów taka odpowiedź jest znana.

Wiele problemów sprowadza się do poszukiwania cyklu Hamiltona w grafie. Rozważmy poniższe zadanie [3]:

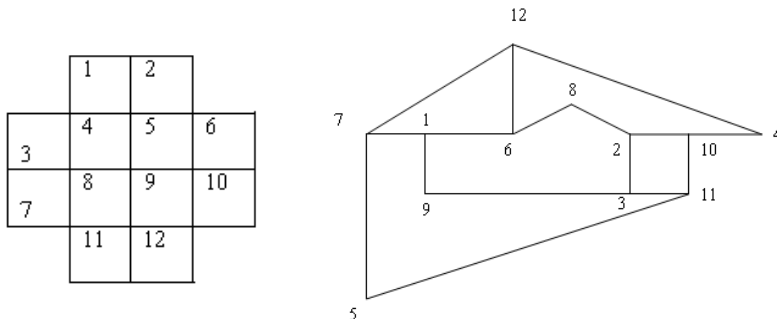
Czy można figurę narysowaną poniżej obejść krokiem skoczka szachowego i wrócić do początkowego pola, odwiedzając przy tym wszystkie pola dokładnie raz?



Rysunek 5. Szachownica dla skoczka szachowego

Wytrwałym łamaczom głów zalecam wykonanie próby takiego spaceru. Z pewnością metodą prób i błędów rozwiązanie zostanie znalezione.

Tę sytuację również możemy przedstawić za pomocą grafu. Wystarczy przyjąć, że każde pole naszej dziwnej szachownicy potraktujemy jako wierzchołek grafu i połączymy dwa wierzchołki krawędzią, gdy z jednego pola na drugie można przejść ruchem skoczka szachowego



Rysunek 6. Po lewej szachownica, gdzie liczby oznaczają wierzchołki grafu, po prawej graf możliwych przejść skoczka po szachownicy.

Rozwiązanie problemu otrzymujemy wyznaczając dowolny cykl Hamiltona w tak utworzonym modelu sytuacji za pomocą grafu.

5. Składowe spójności grafu

Rozważmy następujący problem, który pochodzi z jednej z moich ulubionych książek [3] z łamigłówkami dla młodzieży.

W państwie CYFRY zbudowano 9 miast, które nazwano 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

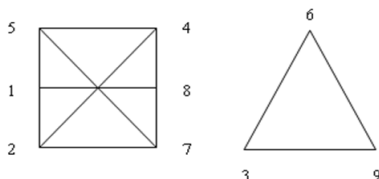
Kilka z tych miast zostało połączonych liniami lotniczymi.

Podróżny zauważył, że dwa miasta mają połączenia lotnicze, wtedy i tylko wtedy, gdy dwucyfrowa liczba utworzona z cyfr-nazw tych miast jest podzielna przez 3.

Czy można z miasta 1 dolecieć do miasta 9?

Rysunek 7. Przykładowe zadanie matematyczne rozwiązywane z pomocą grafów

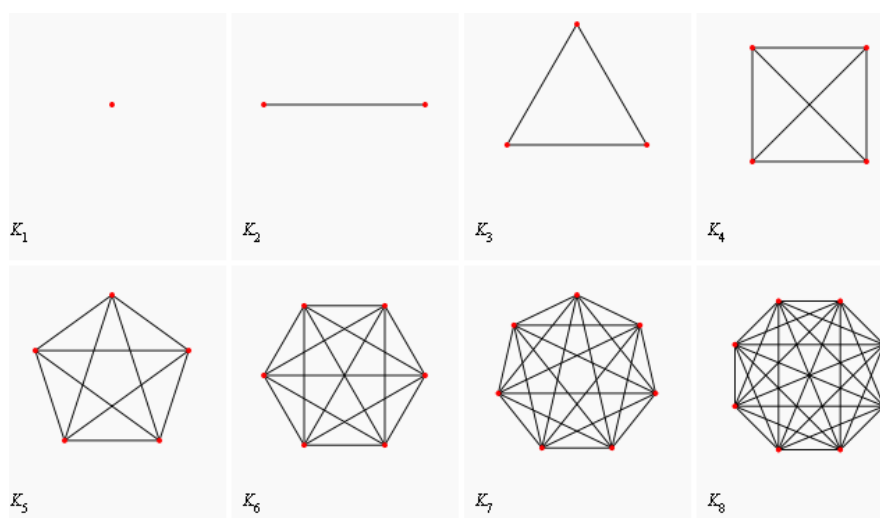
Dla tego zadania możemy zbudować graf, w którym miasta to jego wierzchołki, a bezpośrednie połączenia lotnicze między miastami, to ich krawędzie. Otrzymujemy w ten sposób graf składający się z dwóch części, nazywanych składowymi spójnościami grafu. W obrębie każdej składowej możemy dolecieć z każdego miasta do każdego. Natomiast między miastami z różnych składowych spójności nie ma połączeń.



Z tego rysunku natychmiast otrzymujemy odpowiedź, że nie można dolecieć z miasta 1 do miasta 9.

6. Grafy pełne

Ciekawą rodzinę grafów stanowią grafy pełne. Są to grafy w których każdy wierzchołek jest połączony z każdym. Grafy te mają specjalne oznaczenie K_n , gdzie n oznacza liczbę wierzchołków grafu.



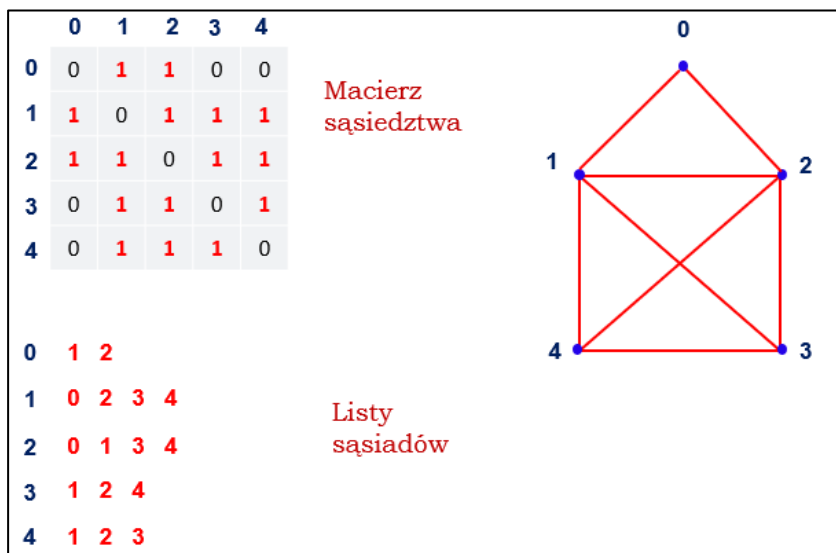
Rysunek 8. Przykładowe grafy pełne [2]

W rzeczywistości często spotykamy się z problemami, które można modelować grafami pełnymi. Wyobraźmy sobie, że zostaliśmy zaproszeni na uroczystą kolację, na którą przybyło n osób. Na początku dobry zwyczaj nakazuje, by każdy przywitał się z każdym. Czy potrafimy odpowiedzieć na pytanie, ile nastąpi powitań dwóch osób?

Każda osoba może być potraktowana jako wierzchołek grafu, każde powitanie, jako krawędź między dwiema osobami. Ponieważ każdy wita się z każdym graf będzie pełny. Znalezienie liczby powitań sprowadza się do znalezienia liczby niepowtarzających się krawędzi grafu. Jeśli wierzchołków jest n , to każdy z tych n wierzchołków jest połączony z $n - 1$ wierzchołkami. W ten sposób jednak każdą krawędź policzymy dwa razy, bo krawędź między osobami x i y oraz y i x to ta sama krawędź. Zatem liczba wszystkich powitań wyraża się wzorem: $\frac{n(n-1)}{2}$. A czy w grafach pełnych jest cykl Eulera czy Hamiltona? Pozostawiam to pytanie do rozważenia czytelnikom.

7. Reprezentacja grafów w komputerze

W jaki sposób przekazać komputerowi informacje o grafie o n wierzchołkach, dotyczące krawędzi? Grafy można reprezentować na wiele sposobów i w zależności od rozwiązywanego problemu jedna z tych reprezentacji może być bardziej korzystna od innej. Przedstawimy w tym miejscu dwie reprezentacje, wykorzystywane najczęściej. Są to struktury dwuwymiarowe. Pierwsza reprezentacja to macierz sąsiedztwa, druga to lista sąsiadów. Sąsiadami nazywamy wierzchołki bezpośrednio ze sobą połączone.



Rysunek 9. Po lewej u góry macierz sąsiedztwa, po lewej u dołu lista sąsiadów dla grafu [4] po prawej stronie.

Macierz sąsiedztwa, w zależności od używanego języka programowania, może być reprezentowana np. z pomocą listy list o rozmiarze $n \times n$ (Python) albo dwuwymiarowej tablicy bądź wektora o rozmiarze $n \times n$ (C++). Dla ustalenia uwagi będziemy posługiwali się nazewnictwem z języka Python. Przed wczytaniem informacji o krawędziach grafu, wszystkim polom w liście list nadajemy wartość zero. Za każdym razem, gdy wczytujemy połączenia między wierzchołkami x, y , w macierzy sąsiadów w miejscu o indeksach x, y i y, x wstawiamy wartość jeden.

Lista sąsiadów może być reprezentowana np. słownikiem, w którym klucze są numerami wierzchołków, a wartości są listami ich sąsiadów. Na początku słownik jest pusty, potem dodajemy do pary: klucze (wierzchołki) i jako ich wartości puste listy sąsiadów. Za każdym razem, gdy wczytujemy połączenie między wierzchołkami x, y w słowniku dla kucza x dokładamy do jego listy sąsiadów wierzchołek y , a dla kucza y dokładamy do jego listy sąsiadów wierzchołek x . Poniżej znajdują się przykładowe implementacje tych struktur w języku Python.

```
def wypisz_graf(g):
    for i in g:
        print(i)

def graf_macierz_zerowa(g, n):
    for i in range(n):
        s=n*[0]
        g.append(s)

def graf_macierz(g, m):
    for i in range(m):
        p=int(input(''))
        k=int(input(''))
        g[p][k]=1
        'g[k][p]=1 jeśli graf nie jest skierowany'

graf=[]
w=int(input(''))
k=int(input(''))
graf_macierz_zerowa(graf,w)
graf_macierz(graf, k)
wypisz_graf(graf)
```

Rysunek 10. Przykładowa implementacja macierzy sąsiedztwa grafu w języku Python [4]

```
n=int(input('Podaj liczbę wierzchołków:'))
m=int(input('Podaj liczbę krawędzi'))

def graf_sloownik(g,n,m):
    for i in range(n):
        g[i]=[]
    for i in range(m):
        p=int(input(''))
        k=int(input(''))
        g[p].append(k);
        'g[k].append(p); - gdy graf nie jest skierowany'

g={}
graf_sloownik(g,n, m)
print(g)
```

Rysunek 11. Przykładowa implementacja listy sąsiadów grafu w języku Python [4]

Możemy teraz zastanowić się, w jaki sposób na podstawie reprezentacji grafu w komputerze stwierdzić, że graf jest grafem Eulera? Nie będzie to najszybszy algorytm, ale wystarczy sprawdzić, czy liczba jedynek w każdej kolumnie bądź wierszu macierzy sąsiedztwa jest parzysta lub sprawdzić, czy długość listy wartości dla każdego klucza w słowniku reprezentującego listę sąsiadów jest parzysta.

Pozostawiam do rozważania odpowiedź na pytanie, który z wierzchołków ma najwięcej sąsiadów? Zauważmy, że jest to pytanie w rzeczywistości np. o osobę o największej liczbie znajomych, itp. Powyższe ćwiczenia pozwalają nie tylko na modelowanie sytuacji problemowych grafami, ale również na utrwalenie pracy ze strukturami dwuwymiarowymi i ćwiczą wyobraźnię przestrzenną.

Po powyższym wprowadzeniu, mamy otwartą już drogę do zabawy w modelowanie sytuacji za pomocą grafów i rozważania ich własności, by rozwiązywać efektywnie problemy. Jednym z ciekawszych problemów, modelowanych grafami skierowanymi, jest ustawianie kolejności czynności przy produkcji np. samochodów, samolotów lub w najprostszej sytuacji codziennej, np. w ubieraniu się – po to by nie założyć rano skarpetek na buty 😊

Literatura

1. Graf hamiltonowski – Wikipedia, wolna encyklopedia, https://pl.wikipedia.org/wiki/Graf_hamiltonowski, ostatni dostęp 15.06.2025 roku
2. Graf pełny – Wikipedia, wolna encyklopedia, https://pl.wikipedia.org/wiki/Graf_pe%C5%82ny, ostatni dostęp 15.06.2025 roku
3. Kourliandtchik L., Etiudy matematyczne. Od matematycznych krzyżówek do teorii grafów, Oficyna wydawnicza Tutor, Toruń 2000 roku
4. Kwiatkowska A. B., Materiały do wykładu Programowanie i Algorytmika, <https://moodle.mat.umk.pl>, ostatni dostęp 15.06.2025 roku