Informatyka w Edukacji, XVII
UMK Toruń, 2020

ŁAMIGŁÓWKI ALGORYTMICZNE W SZKOLE PONADPODSTAWOWEJ

Paweł Perekietka
Liceum im. Powstańców Wielkopolskich w Tarnowie Podgórnym
Liceum im. bł. Natalii Tułasiewicz w Poznaniu
perekietka@o2.pl

Abstract. At the secondary school level, the traditional Olympiad in Informatics remains inaccessible to a vast majority of students in Poland. We describe examples of pen-and-paper algorithmic puzzles, i.e. tasks that invite algorithmic thinking that is accessible to a much broader audience

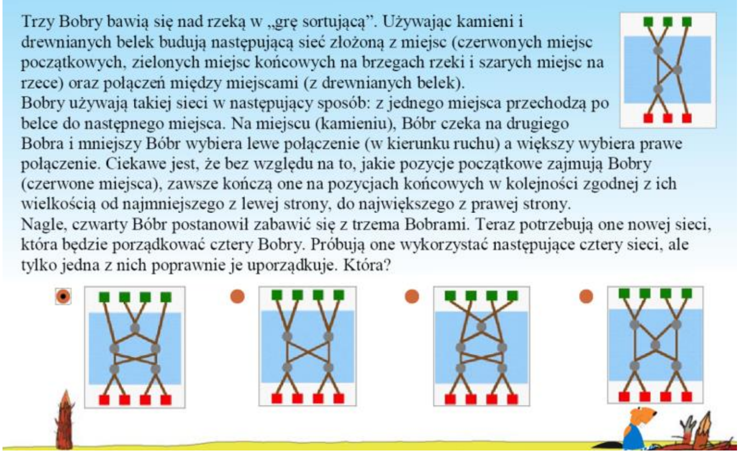
1. Wstęp

Wśród ważnych elementów pracy z uzdolnionymi informatycznie prof. Krzysztof Diks wymienia udział uczniów w konkursach informatycznych, nazywając je motorem rozwoju talentu ([3], str. 38), podkreślając rolę wspólnoty zainteresowań. Te spostrzeżenia oparte są na doświadczeniu pracy z najlepszymi – finalistami i laureatami Olimpiady Informatycznej, uczestnikami olimpiad międzynarodowych.

Nauczyciel informatyki pracujący na co dzień w szkole ponadpodstawowej może postawić pytanie: Jaki konkurs mogę zaproponować moim zdolnym uczniom, by rozwijali swoje talenty, na miarę swoich możliwości? Wydaje się, że brakuje w Polsce takiego krajowego konkursu. Polska edycja Międzynarodowego Konkursu Informatycznego Bóbr oraz Olimpiada Informatyczna w postaciach, jakie są proponowane obecnie, to zdecydowanie zbyt mała oferta. Bardzo brakuje propozycji pośredniej – konkursu bardziej powszechnego, który poprzez inicjowanie lokalnych środowisk współpracy i rywalizacji (w szkole i pomiędzy szkołami) mógłby się stać motorem zmian – przyczynić się do tego, aby jako nowoczesną postrzegano szkołę, która może zaszczepić wśród uczniów nową pasję – zamiłowanie do algorytmiki.

2. Łamigłówki algorytmiczne wśród zadań konkursowych

Wśród zadań konkursu Bóbr można znaleźć łamigłówki, które można zaliczyć do łamigłówek algorytmicznych – przyjmujemy, że łamigłówka algorytmiczna to taka, która może być pomocna w kształceniu umiejętności tworzenia algorytmów rozwiązywania problemów, w szczególności określania strategii wygrywającej w grach – oraz analizowania algorytmów (ich poprawności, pracochłonności). Zadania wraz z odpowiedziami można znaleźć na stronie internetowej konkurs http://bobr.edu.pl. Poniżej przykład zadania pt. Gra sortująca.



Rysunek 1. Przykład zadania algorytmicznego konkursu Bóbr 2009

Wpływ konkursu na zmiany w kształceniu informatycznym w polskich szkołach jest niewystarczający. Być może ograniczony wpływ wynika z prostych przyczyn: po pierwsze – w większości szkół konkurs jest wydarzeniem jednodniowym trwającym kilkadziesiąt minut, po drugie – zadania są rozwiązywane przy komputerze, co ogranicza liczbę uczestników (i liczbę nauczycieli-organizatorów konkursu w szkole), a po trzecie – być może najważniejsze – brakuje opracowań dla nauczycieli, w których znaleźliby komentarze merytoryczno-metodyczne do zadań.

Wydaje się, że konkurs mógłby wiele zyskać na popularności i efektywności, gdyby dopuścić możliwość rozwiązywania zadań poza pracownią komputerową,. Jeśli konkurs miałby stać się bardziej znaczący dla rozwoju polskich szkół, to powinien składać się z co najmniej z dwóch etapów. Na zawodach drugiego etapu powinno wymagać się zapisu choćby szkicu rozwiązań. Finalistom konkursu można by proponować udział w warsztatach z algorytmiki i programowania algorytmów. Cześć uczniów mogłaby wówczas z powodzeniem brać udział w Olimpiadzie.

Olimpiada Informatyczna jest konkursem elitarnym, w którym uczestniczą wyłącznie nadzwyczajnie uzdolnieni, którzy często mają możliwość otrzymania wsparcia ze strony wybitnych nauczycieli i nauczycieli akademickich. Oczywiste jest, że dla zdecydowanej większości młodzieży zadania konkursowe są zwyczajnie zbyt trudne. Kompetencje, zarówno matematyczne, jak i programistyczne, jakich wymaga się od rozwiązujących zadania, znajdują się poza tzw. ich strefą najbliższego rozwoju. Na niewiele mogą się przydać szczegółowe opracowania rozwiązań zadań, które nierzadko wymagają wiedzy na poziomie nawet drugiego roku studiów matematycznych. Nauczyciele zauważają, że z roku na rok poziom oczekiwań wobec uczestników konkursu rośnie. Tymczasem nie powiększa się liczba szkół, w których młodzież mogłaby liczyć na wsparcie w przygotowaniu do konkursu.

Wśród zadań z olimpiad informatycznych, zwłaszcza edycji z lat 90. XX wieku, można zaleźć zadania programistyczne, których treść da się sformułować w postaci łamigłówek algorytmicznych. Oto przykład łamigłówki pt. Kajaki:

> Organizując spływ, wypożyczamy na przystani kajaki. W jednym kajaku mogą popłynąć co najwyżej dwie osoby, a suma ich wag nie może przekroczyć ustalonego obciążenia. Aby zapłacić jak najmniej, szukamy sposobu rozmieszczenia wszystkich uczestników spływu w minimalnej liczbie kajaków. Zaproponuj algorytm parowania uczestników spływu.

Zadania Olimpiady Informatycznej oraz innych konkursów programistycznych, po usunięciu z ich treści tzw. warstwy technicznej, mogą być użyteczne dla wzbudzenia zainteresowania programowaniem, zainteresowawszy ich uprzednio algorytmiką [1].

Łamigłówki algorytmiczne i kombinatoryczne można znaleźć wśród zadań Międzynarodowego Konkursu Kangur Matematyczny:

> W spotkaniu piłkarskim drużyna gospodarzy objęła prowadzenie i nie straciła go do końca meczu. Mecz zakończył sie˛ zwycięstwem gospodarzy w stosunku 5:4. Na ile sposobów mogły padać bramki w tym meczu?

Wśród konkursów organizowanych w innych krajach na szczególną uwagę zasługuje Australijski Konkurs Informatyczny (AIC – *Australian Informatics Competition*), który od kilku lat jest organizowany pod zmienioną nazwą CAT – *Computational and Algorithmic Thnking*). Zadania konkursu są z założenia zapisywane w postaci łamigłówek, które rozwiązuje się z użyciem kartki i długopisu.

Za zgodą organizatorów wiele zadań konkursu AIC/CAT zostało przetłumaczonych na język polski i można je znaleźć wśród zbiorów zadań drużynowego konkursu KOALA, organizowanego od roku szkolnego 2013/2014 w Wielkopolsce.

Oto przykład zadania pt. Naleśniki.

> Na stole są trzy talerze: biały, zielony i niebieski. Na talerzu białym leży stos *n* naleśników (jeden na drugim). Pozostałe talerze są puste. Naleśniki należy przenieść wykonując jak najmniej ruchów, z talerza białego na talerz niebieski. Docelowo naleśniki powinny być ułożone w kolejności: od naleśnika największego (na spodzie stosu) do naleśnika najmniejszego (na wierzchu stosu).
>
> Zakładamy, że:
>
> – naleśniki są różnych rozmiarów: 1, 2, 3, …, *n*,
> – są ułożone w losowej kolejności,

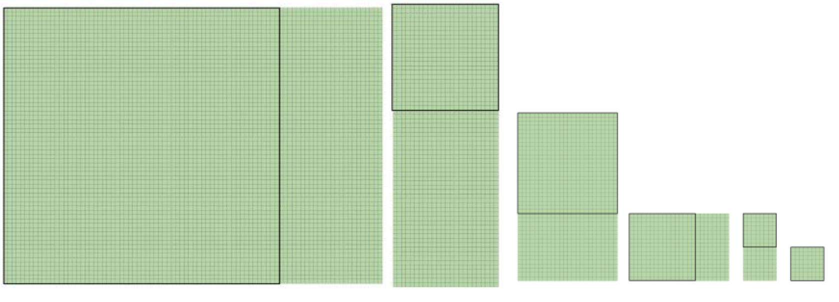
– naleśniki z talerza na talerz można przenosić tylko pojedynczo,
– w każdym ruchu można przenosić tylko naleśnik z wierzchu stosu i trzeba go położyć na wierzch stosu,
– naleśnik położony na talerz niebieski nie może już być z niego przenoszony.

Dla każdego *n* znajdź najbardziej pesymistyczny układ naleśników na białym talerzu, to jest taki, dla którego liczba operacji przenoszenia będzie największa.

3. Inne źródła łamigłówek algorytmicznych

Nauczyciele znają być może łamigłówkę nazywaną czasami wycinanką Euklidesa, z pomocą której można pogłębić rozumienie algorytmu Euklidesa. Oto sformułowanie problemu z jednego z podręczników w zakresie podstawowym:

> Kołdra patchworkowa powstaje ze zszycia wielu mniejszych kawałków tkanin. Wyobraź sobie, że przygotowujesz projekt małej kołdry o wymiarach 112 × 88 cm, która ma być uszyta z jak największych kwadratowych kawałków równej wielkości. Jakiej długości bok powinien mieć taki kawałek?



Rysunek 2. Etapy wycinanki Euklidesa dla prostokąta o 112 x 88

Ciekawe jest to, że istotę wielu zagadnień z dziedzin tradycyjnie wykładanych na studiach ekonomicznych (np. badania operacyjne, zagadnienia transportowe, optymalizacja) ilustruje się za pomocą łamigłówek.

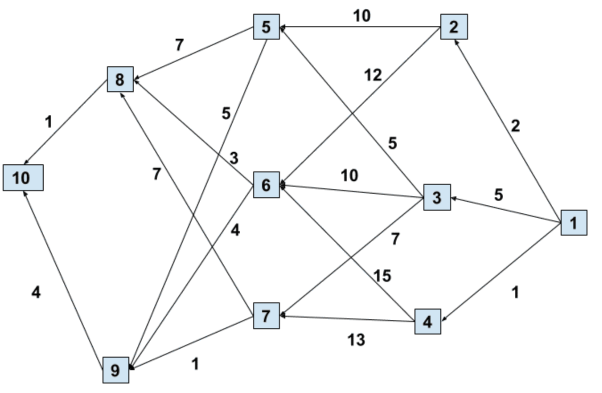
Słynny problem komiwojażera (wędrownego sprzedawcy) można przedstawiać z użyciem różnych narracji. Na przykład w nowozelandzkim Przewodniku po informatyce (*CS Field Guide*) mamy następującą łamigłówkę-zagadkę:

> Rybak łowiący raki, umieścił w wodzie 18 pułapek. Każdego dnia rybak odwiedza łodzią wszystkie pułapki i sprawdza, czy nie złapały się w nią raki. Zaproponuj algorytm, który może służyć do znalezienia jak najkrótszej trasy odwiedzenia wszystkich pułapek..

Klasyczny przykład to zagadnienie dyliżansu ilustrujące ideę programowania dynamicznego (zasadę optymalności Bellmana). Z pewnością uczniowie szkół ponadpodstawowych nie będą mieli problemu ze zrozumieniem zadania:

Na rys. 3 zaznaczono różne możliwe trasy dyliżansu ze Wschodu na Zachód. Każdy ponumerowany prostokąt na mapie reprezentuje osiągnięty stan.

Liczba zapisana przy krawędzi drogi to cena polisy ubezpieczeniowej zależna od wybranej drogi. Wybierz trasę, która minimalizuje koszt ubezpieczenia.



Rysunek 3. Możliwe trasy dyliżansu

4. Problem minimalnej siatki połączeń, jako łamigłówka

Na początku lat 20. XX w. czeski matematyk Otakar Borůvka otrzymał zlecenie od zespołu inżynierów projektujących sieć linii wysokiego napięcia, czyli połączeń trafostacji (stacji transformatorowych) dla wybranych wcześniej lokalizacji w południowej części Moraw (dziś to część Republiki Czeskiej). Miał opracować matematycznie optymalne rozwiązanie problemu budowy połączeń w sieci energetycznej.

Wyboru stacji do połączenia należało dokonać oczywiście na podstawie kryterium kosztów, który zależał od odległości między stacjami.

Oto specyfikacja problemu:

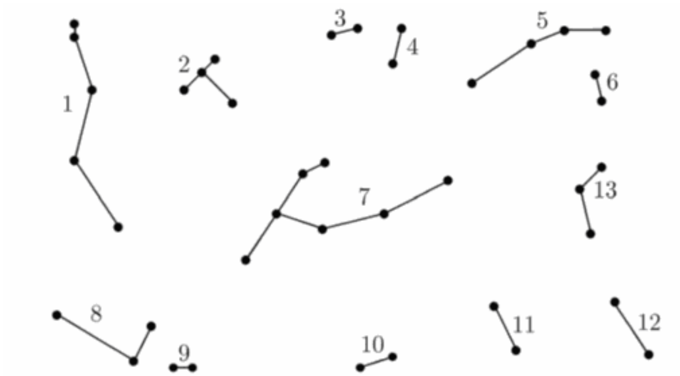
Dane: Zbiór lokalizacji przedstawionych jako punkty na płaszczyźnie.

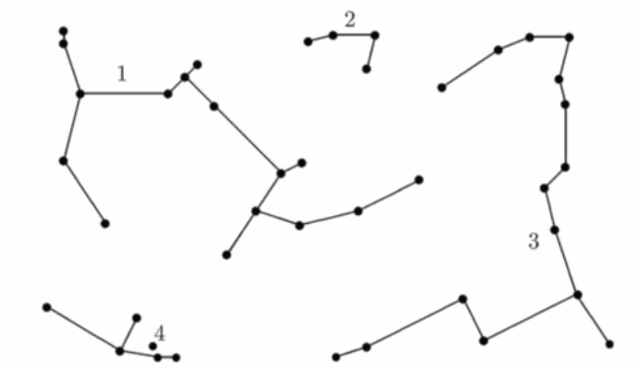
Wynik: Najtańsza z możliwych sieć, łącząca wszystkie lokalizacje.

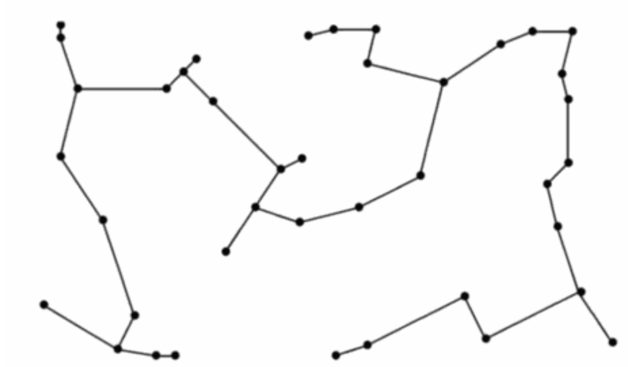
Strategia zastosowana przez Borůvkę była zaskakująco prosta: Konstruujemy rozwiązanie problemu stopniowo, etapami. Na każdym etapie rozwiązywania zadania dokonujemy wyboru tego, co w tym momencie jest optymalne i nie przejmujemy się tym, co będzie dalej! To podejście zachłanne[1].

[1] W 1929 r. Otakar Borůvka podał dowód matematyczny, z którego wynika, że jego zachłanny algorytm jest poprawny i zawsze daje optymalne rozwiązanie problemu.

Poniższe rysunki ilustrują pomysł rozwiązania przedstawiony przez Borůvkę – to łamigłówka dla 40 stacji. Dla ułatwienia składowe powstające w kolejnych etapach ponumerowano.







Oto propozycja ćwiczenia dla ucznia sprawdzające rozumienie rozwiązania:

Zaznacz na kartce z zeszytu 16 punktów. Skonstruuj sieć łączącą te punkty, stosując algorytm Borůvki. Do odnajdywania najbliższego punku używaj cyrkla.

4. Literatura metodyczna dla nauczycieli

Dla nauczycieli godne polecenia są książki na temat heurystycznego rozwiązywania zadań, w tym klasyczne pozycje George'a Polyi, przetłumaczone na język polski: *Jak to rozwiązać?* i *Odkrycie matematyczne*. Warto dotrzeć do monografii prof. Andrzeja Góralskiego (autora polskiego przekładu *Odkrycia matematycznego*) pt. *George'a Pólya pedagogika mistrzostwa, czyli o relacji uczeń – mistrz i jej regułach*" wydanej w 2013 r. przez Akademię Pedagogiki Specjalnej w Warszawie.

Przydatne dla nauczyciela mogą być też niektóre rozdziały książki pt. *Nauczanie łamigłówkowe* (autorzy: Zbigniew Michalewicz, Matthew Michalewicz), wydanej przez Polsko-Japońską Akademię Technik Komputerowych w Warszawie.

Oto przekład na język polski fragmentu wprowadzenia do zajęć prof. Polyi ze studentami, prowadzonych metodą odkrywania. Profesor po wprowadzeniu stawia niebanalny problem kombinatoryczny w postaci łamigłówki[2].

> W matematyce, gdy coś jest ukończone, kompletne, to składa się z dowodów. Odkrywanie zaś zawsze zaczyna się od formułowania przypuszczeń! Chciałbym, aby Państwo mieli okazję konkretnie przekonać się, co to znaczy. Dlatego to nie będzie wykład. To będzie zabawa w grę domysłów: zdobyć wyobrażenie o tym, czym są uzasadnione domysły, domniemania. Nie chodzi o dzikie odgadywanie. Im mniej wiemy, tym łatwiej zgadywać. Przemyślane domniemania to coś innego. Lekcja matematyki w szkole jest dobrą okazją do tego, by się tego uczyć. (…)
>
> Oczywiście domniemanie może być błędne. To jest część sztuki odkrywania. Nawet błędna odpowiedz jest pomocna. Błędna odpowiedz prowadzi do lepszej odpowiedzi, potem do jeszcze lepszej, aż w końcu dochodzimy do prawdy. (...) ´
>
> Dam Państwu problem do rozwiązania. (…) Nie trzeba wiele wiedzieć. Każdy wie, co to jest płaszczyzna. Płaszczyzna to cos bardzo płaskiego. (...) Jest płaska i nieograniczona. Proszę wyobrazić sobie pięć płaszczyzn w przestrzeni. (...) Te pięć płaszczyzn dzieli przestrzeń na wiele części, obszarów. Powstaje pytanie: Na ile części?
>
> Proszę wyobrazić sobie wielki kawałek sera. Może zielonego, może szwajcarskiego, jakiegokolwiek, jaki Państwo lubią. Następnie tniemy go: raz, dwa, trzy, cztery, pięć. Nóż jest bardzo ostry. Jest wiele kawałków. Powstaje pytanie: Jak wiele kawałków?
>
> Kto z Państwa jest gotowy, by zaproponować odpowiedź? Proszę, śmiało... ´
>
> – Dwadzieścia pięć kawałków?

[2] Film pt. *Let us teach guessing* o heurystycznym rozwiązywaniu zadań z zajęć ze studentami, które prowadził G. Polya był zarejestrowany w 1966 r. przez MAA.

5. Zakończenie

Rozwiązywanie łamigłówek algorytmicznych, dobrze zaplanowane przez nauczyciela jako wprowadzenie do wybranych lekcji algorytmiki, może być działalnością uczniów o dużej wartości kształcącej. Łamigłówki te uczą radzenia sobie ze złożonością, budowania strategii, formułowania przypuszczeń i ich weryfikowania, aktywizują uczniów, wdrażają do pracy wspólnej, dyskusji nad rozwiązaniami. Łamigłówki uatrakcyjniają zajęcia i mogą budzić pozytywną motywację do nauki.

Wydaje się, że rozwiązywanie łamigłówek algorytmicznych szczególną wartość ma wówczas, gdy tego typu aktywności uczniów mają charakter współpracy (pracy w grupach), jak i rywalizacji (jak w konkursie). Dlatego warto by stworzyć konkurs ogólnopolski albo konkursy regionalne, w których młodzież mogłaby rozwijać talent.

Literatura

Zainteresowanym opracowaniami naukowymi na temat łamigłówek algorytmicznych polecamy artykuł [2].

1. Kubica M. Radoszewski J., Algorithms without Programming, *Olympiads in Informatics* 4, 2010, 52-66.
2. Levitin A., Algorithmic Puzzles: History, Taxonomies, and Applications in Human Problem Solving, *Journal of Problem Solving*, 10, 2017, 1-14.
3. Sysło M. M. (red.), *Praca z uczniem uzdolnionym informatycznie*. WWSI, Warszawa 2011.