*Informatyka w Edukacji, XVI*
*UMK Toruń, 2019*

# OD ALGORYTMU EUKLIDESA DO ZŁOTEGO PODZIAŁU

*Maciej Borowiecki*
*Ośrodek Edukacji Informatycznej i Zastosowań Komputerów*
*w Warszawie, Raszyńska 8/10*
*maciej.borowiecki@oeiizk.waw.pl*

*Abstract. During the workshop, we will show the geometric interpretation of the Euclidean algorithm to draw the approximation of golden rectangles and the golden spiral. We show appliance of Fibonacci numbers. Our work environment is a spreadsheet for simple calculations and Processing for writing scripts.*

## 1. Wprowadzenie

Przy złotym podziale odcinka proporcja dłuższej części do krótszej jest taka sama jak całego odcinka do dłuższej części. Można się zastanawiać, co ma piernik do wiatraka, czyli co ma algorytm Euklidesa wspólnego ze złotym podziałem. Podczas warsztatu wykorzystamy interpretację geometryczną algorytmu Euklidesa do rysowania przybliżenia złotych prostokątów (długości boków prostokąta pozostają w złotej proporcji) i złotej spirali. Wykorzystamy też liczby Fibonacciego. Zastosujemy arkusz kalkulacyjny do prostych obliczeń i środowisko programistyczne Processing do napisania krótkich programów rysujących spirale.

## 2. Interpretacja geometryczna algorytmu Euklidesa

Grecki matematyk Euklides około 300 lat przed naszą erą stworzył „Elementy" – dzieło, z którego matematyka korzysta do dnia dzisiejszego. Opisał w nim między innymi algorytm wyznaczania największego wspólnego dzielnika dwóch liczb całkowitych. Oparł się na następującej własności liczb: jeśli dla dwóch liczb całkowitych większą z nich zastąpimy różnicą większej i mniejszej, to wartość największego wspólnego dzielnika (NWD) się nie zmieni.

Proces wyszukiwania NWD liczb a i b, gdzie a > b, można w prosty sposób zinterpretować graficznie. Rysujemy prostokąt o długościach boków takich jak badane liczby. Następnie zaznaczamy największy możliwy kwadrat, czyli o boku b. W kolejnym kroku zajmujemy się prostokątem, który pozostanie. Ponownie zaznaczamy największy możliwy kwadrat. Postępujemy w ten sposób tak długo, aż figura jaka pozostanie, będzie kwadratem.

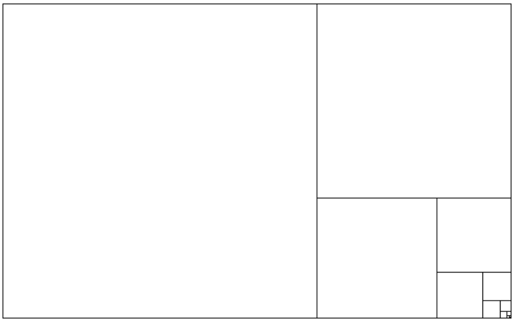
```
int wys=480;
int x,y;

void setup() {
  size(800,600); noLoop();
  x=(width-szer)/2; y=(height-wys)/2;
}

void draw() {
  while (szer!=wys) {
    rect(x,y,szer,wys);
    if (szer>wys)  {
      szer=szer-wys;
      x=x+wys;
    }
    else {
      wys=wys-szer;
      y=y+szer;
    }
  }
  rect(x,y,szer,wys);
}
```

**Rysunek 1** Ilustracja algorytmu Euklidesa, realizacja w Processingu

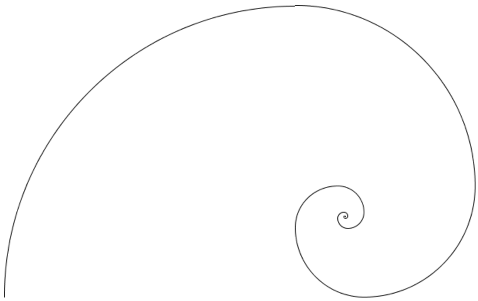
# 3. Liczby Fibonacciego

Z liczbami Fibonacciego spotykamy się także na lekcjach w szkole. Ich definicja jest następująca: dwie pierwsze liczby ciągu są równe 1, każda następna jest sumą dwóch poprzednich. Ciekawostką jest częste występowanie liczb Fibonacciego np. w przyrodzie i architekturze, wykorzystuje się je również do modelowania wielu zjawisk. Interesujący efekt uzyskamy, gdy w programie ilustrującym algorytm Euklidesa jako boki wyjściowego prostokąta przyjmiemy dwie kolejne liczby Fibonacciego np. 610 i 337.

Największy wspólny dzielnik dwóch sąsiednich liczb Fibonacciego wynosi 1 (czyli takie liczby są względnie pierwsze, najmniejszy rysowany kwadrat jest pojedynczym punktem), a kwadraty są „odcinane” na przemian od szerokości i wysokości. Cechą charakterystyczną liczb Fibonacciego jest także to, że iloraz dwóch sąsiednich dąży do złotego podziału. Jeżeli w każdym z odcinanych kwadratów narysujemy ćwiartki okręgów, to otrzymamy spiralę Fibonacciego. Musimy jedynie zmienić kolejność rysowania kwadratów w przytoczonym wcześniej programie: pierwszy po lewej, drugi na górze, trzeci po prawej, czwarty od dołu itd.

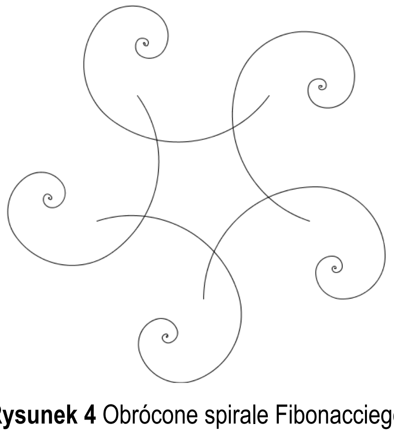


**Rysunek 2** Ilustracja algorytmu Euklidesa dla liczb 610 i 377



**Rysunek 3** Otrzymana spirala Fibonacciego

Rysując kilka odwróconych spiral możemy uzyskać bardzo ciekawe rysunki.



**Rysunek 4** Obrócone spirale Fibonacciego

# 4. Podsumowanie

Kto z nas przypuszcza, że wiele książek wydanych między 1550 a 1770 rokiem stosowało proporcje złotego podziału z dokładnością do pół milimetra? Inne zastosowania tej zasady znajdziemy w architekturze, muzyce, projektach technicznych, a nawet w finansach. Ucząc programowania, warto odwołać się do klasycznych algorytmów i ważnych zagadnień matematycznych. Podchodząc do nich w nieco nietypowy sposób, np. interpretując graficznie, możemy wzbudzić zainteresowanie uczniów i zachęcić ich do zgłębiania wiedzy nie tylko informatycznej.

# Literatura

1. Borowiecki M., *Od Euklidesa do złotego podziału*, Świat matematyki, Nr 2/2018 (48), Wrocław 2018.
2. Materiały na stronie M. M. Sysło, *Liczby Fibonacciego – jak być doskonałym*, http://mmsyslo.pl/content/download/294/1170/version/1/file/Piramidy_szyszki_06.pdf, ostatni dostęp 30.05.2019 roku.
3. Sysło M. M., *Piramidy, szyszki i inne konstrukcje algorytmiczne*, Helion, Gliwice 2015.
4. *Strona domowa Processingu*, https://processing.org, ostatni dostęp 30.05.2019 roku.