

W POSZUKIWANIU ABSTRAKCYJNEGO MODELU

Anna Beata Kwiatkowska
Wydział Matematyki i Informatyki, UMK w Toruniu
aba@mat.umk.pl

Streszczenie. W pracy przedstawiamy proces budowania abstrakcyjnych modeli dla kilku ciekawych problemów, które mogą być rozważane nawet z najmłodszymi uczniami. Analizowanie własności tych modeli pomaga w odnajdywaniu rozwiązania algorytmicznego.

Początkujący algorytmicy często popełniają błąd polegający na myśleniu o algorytmie w kategoriach implementacyjnych a nie abstrakcyjnych.

Krzysztof Diks, *W poszukiwaniu wyzwań*, UW, 2012.

1. Od legendy do modelu abstrakcyjnego

Jak głosi tybetańska legenda, dawno temu, bóg Brahma złożył odmierzenie czasu w ręce mnichów w swojej świątyni. Na jednym z trzech diamentowych słupków położył 64 złote krążki, począwszy od tego o największej średnicy, aż do tego o średnicy najmniejszej. Zadaniem mnichów było przełożenie wszystkich krążków z jednego słupka na drugi za pośrednictwem trzeciego. Mogli oni jednak przekładać tylko po jednym krążku i kłaść krążek o mniejszej średnicy na krążek o średnicy większej. Brahma polecił mnichom pracować bez odpoczynku. Zapowiedział, że gdy wykonają to zadanie, nastąpi koniec świata. Czy wierząc w tę legendę powinniśmy obawiać się, że wszechświat, który ma około 13,7 miliarda lat, przestanie istnieć za naszych czasów? Jeśli przyjmujemy, że mnisi przekładają jeden krążek w ciągu jednej sekundy, będą pracowali blisko 18,5 trylion sekundy, czyli około 584 miliardy lat. Nie ma więc powodu do obaw.

Legenda ta stała się podstawą łamigłówki, która rozpowszechniła się najpierw w Azji wschodniej – w Chinach, Japonii, Wietnamie, gdzie produkowano na jej potrzeby krążki ceramiczne. Pod koniec XIX wieku doczekała się też wersji europejskiej – francuski matematyk Eduard Lucas zaproponował, by przekładać osiem krążków i nadał tej zabawie nazwę „Wieże Hanoi”. W ten sposób problem znany z legendy doczekał się uproszczonego, **rzeczywistego modelu**. W sieci Internet dostępne są gry on-line, umożliwiające samodzielne układanie krążków, odmierza-

nie czasu potrzebnego na przełożenie wszystkich krążków, obliczanie liczby wykonywanych przestawień krążków z jednego słupka na inny.

Problem wież Hanoi jest znanym dziś problemem informatycznym. Kolejne słupki oznaczane są najczęściej literami A, B, C i rozpatruje się n krążków, które chcemy przenieść zgodnie ze znanymi zasadami, z słupka A na słupek C, wykorzystując słupek B. Przedstawiając problem w ten sposób zaniedbujemy cechy krążków i słupków, gdyż nie są one istotne dla algorytmu. Uogólniamy natomiast nasze działanie rozpatrując dowolną liczbę krążków. Ta znana łamigłówka spełnia ponadto wiele reguł, które warto poznać bliżej, patrz [2].



Rysunek 1. Jeden z drewnianych modeli wież Hanoi

Uproszczenie problemu przez ograniczenie cech rozpatrywanych w nim obiektów wyłącznie do kluczowych dla algorytmu oraz jego uogólnienie polegające na badaniu zachowania algorytmu np. na dowolnie dużych danych, prowadzi do zbudowania **modelu abstrakcyjnego** sytuacji problemowej. Przejście do abstrakcji na drodze rozwiązywania problemu umożliwia dokładniejszą jego analizę bez rozpraszania uwagi zbędnymi szczegółami, ułatwia odnajdywanie własności uczestniczących w nim obiektów i dzięki temu szybciej naprowadza na algorytmiczne rozwiązanie. Jest to ważny i trudny etap rozwiązywania.

W pracy przedstawiamy proces budowania abstrakcyjnych modeli dla kilku ciekawych problemów, które mogą być rozważane nawet z najmłodszymi uczniami. Analizowanie własności tych modeli pomaga w odnajdywaniu rozwiązania algorytmicznego.

2. Podejście abstrakcyjne – od kiedy zacząć?

Z punktu widzenia psychologii, myślenie to proces przetwarzania informacji zawartych w spostrzeżeniach, wyobrażeniach i słowach (pojęciach) (J. Koziielecki, 1992). Myślenie abstrakcyjne natomiast to zdolność pojęciowego ujmowania rzeczywistości, opisywanie jej abstrakcyjnymi pojęciami. Jest ono niezbędnym składnikiem kreatywności. Jean Piaget (1896-1980) szwajcarski psycholog, filozof, socjo-

log, pedagog, który jest twórcą teorii rozwoju poznawczego umysłu dziecka, opisuje cztery fazy rozwoju na drodze do osiągnięcia przez dziecko zdolności do myślenia abstrakcyjnego:

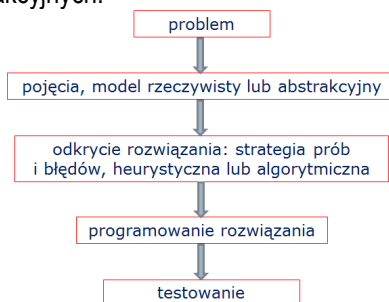
pierwsza faza: od 0 do 2 roku życia dzieci uczą się przez zmysły, ich świat jest doświadczeniem fizycznym sensoryczno-motorycznym;

druga faza: od 2 do 7 roku życia dzieci starają się uaktywnić swoją wyobraźnię; mają bardzo egocentryczne spojrzenie na świat (przedoperacyjna);

trzecia faza: od 7 do 11 roku życia dziecko stosuje logikę i alternatywne perspektywy, co pomaga pojąć związki przyczynowo skutkowe; dzieci mają problem z pojęciami abstrakcyjnymi (faza operacji konkretnej, modele rzeczywiste);

czwarta faza: od 12 roku życia dzieci zaczynają myśleć abstrakcyjnie, co pozwala przekroczyć granicę czasu i przestrzeni (faza operacji formalnych, modele abstrakcyjne).

Obecnie można się spodziewać, że granice wiekowe definiowane przez Piagetą uległy niewielkiemu obniżeniu ze względu na rozwój cywilizacyjny, postęp techniczny, nieustanne rozbudzanie kreatywności, zachowana zostaje jednak kolejność etapów rozwoju. Wprowadzając dzieci od najmłodszych lat w świat rozwiązywania problemów i programowania należy pamiętać, aby w młodszych klasach szkoły podstawowej bazować na modelach rzeczywistych, namacalnych, a wraz z dorastaniem dzieci, po etapie nauczania wczesnoszkolnego, przechodzić łagodnie do budowania modeli abstrakcyjnych.



Rysunek 2. Etapy rozwiązywania problemu

Wyróżnia się trzy zasadnicze strategie w myśleniu podczas budowania i analizy własności modelu abstrakcyjnego, zmierzającej do odkrycia algorytmu:

Strategia prób i błędów (J. Koziński, 1969) Jest to podejmowanie przypadkowych działań ukierunkowanych na rozwiązanie zadania. Te działania są chaotyczne i najmniej skuteczne, można jednak dzięki nim domyślić się rozwiązania. Strategia ta często jest stosowana przez najmłodsze dzieci.

Strategia heurystyczna (George Polya, *Jak rozwiązać?*, PWN, Warszawa 1995) Jest to rozwiązywanie problemu na bazie intuicji i wyobraźni, przyjęcia pewnych własnych zasad i taktyk. Działanie to jest zawodne, nie zawsze prowadzi do prawidłowego rozwiązania, jednak swoboda w poszukiwaniach rozwiązania problemu rozbudza kreatywność.

Strategia algorytmiczna (VIII, IX wiek, Muhammad ibn Musa al-Chorezmi) Metoda ta jest niezawodna i eliminuje ryzyko niepowodzenia, wskazuje jednoznacznie, co należy wykonać, aby rozwiązać zadanie, pozwala na rozwiązywanie nie tylko jednego konkretnego zadania, lecz całej klasy zadań.

Modele i strategie to ważne elementy całego procesu rozwiązywania problemu od jego specyfikacji po testowanie. W zależności od wieku ucznia możemy wybierać te prostsze lub bardziej wyrafinowane.

W dalszych rozważaniach skorzystamy z zadań archiwalnych Konkursu Informatycznego Bóbr [3], aby pokazać jak można pobudzać myślenie abstrakcyjne uczniów przez podejmowanie prób przechodzenia do abstrakcji. Zadania konkursu podzielone są na kategorie wiekowe, odpowiadające kolejnym etapom edukacyjnym, i stanowią bogate źródło pomysłów dla działań związanych z odkrywaniem algorytmów. W wiele krajach biorących udział w tym konkursie, problemy poruszane w zadaniach są rozpatrywane z uczniami i przez to wzbogacają nauczanie informatyki.

3. Uaktywnianie wyobraźni

W jednym z zadań konkursu pojawił się rysunek przedstawiający nakrycie stołu. Zadanie było przeznaczone dla dzieci z klas I-III szkoły podstawowej i polegało na określeniu kolejności, w jakiej zostały postawione na stole poszczególne objekty¹.



Rysunek 3. Przykładowe nakrycie stołu

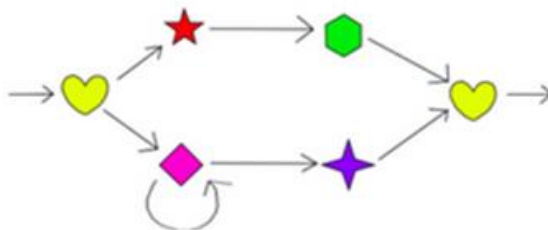
¹ Zadanie „Nakrywanie do stołu”, X Konkurs Informatyczny Bóbr, rok 2015, poziom SKRZAT

Zadanie to można rozwiązać na bazie modelu rzeczywistego tej sytuacji, wykorzystując plastikową filiżankę, spodek, talerzyk, nóż i oraz papierową serwetkę i obrus. Metodą prób i błędów dzieci próbują uzyskać pożądane nakrycie do stołu i w ten sposób określić kolejność położenia elementów na stole. Warto zwrócić uwagę na to, że zdejmowanie elementów ze stołu następuje w odwrotnej kolejności ich ustawiania – to przygotowanie do rozważań prowadzonych na późniejszych etapach edukacyjnych związanych z własnościami ważnej struktury dynamicznej nazywanej stosem.

Aby ćwiczyć wyobraźnię uczniów spróbujmy również pokazać im inne ustawienia elementów na stole i poprosić o określanie kolejności bez symulowania ustawienia. Uczniowie mogą starać się zapamiętać ustawienie i wymieniać kolejność mając zamknięte oczy. Ćwiczenie to można wykonywać z różnymi elementami: mogą to być kolorowe klocki ustawione w wieżę, układ kolorowych patyczków, kartek.

4. Pobudzanie myślenia algorytmicznego

Tradycyjnym ćwiczeniem na etapie przedszkolnym i wczesnoszkolnym jest rysowanie szlaczków. Są one zazwyczaj odtwarzane według gotowego wzoru. Nowym podejściem zaczerpniętym z zadania konkursowego² może być rysowanie szlaczka przez powtarzanie kompozycji wzoru uzyskanego zgodnie wybranym schematem. Przykładowy schemat jest pokazany poniżej.



Rysunek 4. Przykładowy schemat postępowania przy rysowaniu szlaczka

Dziecko może powtarzać zawsze ten sam wzór lub uzyskać jego zmienność przez wybieranie różnych dróg jego komponowania wynikających ze schematu. Na podstawie tego ćwiczenia uczniowie zaczynają rozumieć problem wyboru dróg postępowania oraz powtórzenia.

² Zadanie „Naszynnik dla mamy”, VIII Konkurs Informatyczny Bóbr, rok 2013, poziom SKRZAT

W zadaniu konkursowym elementami schematu były koraliki, z których należało wytworzyć naszyjnik dla mamy. Podobny problem może być zrealizowany podczas prac ręcznych polegających na nadziewaniu koralików na sznurek.

Trudniejszym zadaniem jest odwrócenie kolejności postępowania i postawienie przed uczniem zadania znalezienia schematu według którego można utworzyć korale o określonym wzorze, takim jak na rys. 5.

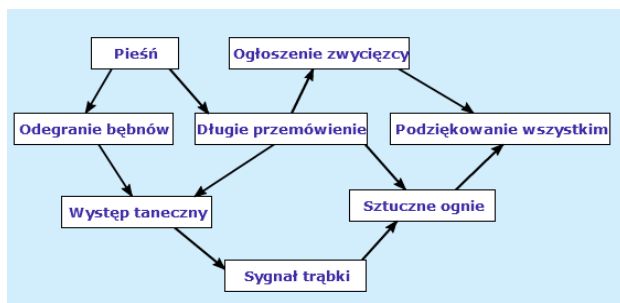


Rysunek 5. Przykładowy wzór korali

Uczeń poszukuje algorytmu i próbuje zapisać go za pomocą schematu. Można narysować wiele schematów, których wynikiem będzie dany wzór. Ta wersja zadania rozwija kreatywność i myślenie algorytmiczne ucznia. Z czasem wzory mogą być bardziej skomplikowane i zawierać powtórzenia złożone z większej liczby elementów.

5. Budowanie abstrakcyjnego modelu

W wielu zadaniach konkursowych dla młodszych dzieci, pod pozornie prostym problemem ukryty jest poważny algorytm, który może być przedmiotem rozważań dopiero na wyższym etapie edukacyjnym. Uczniowie młodszych klas poznają go jedynie intuicyjnie. Na rys. 6³ przedstawiono, która czynności pewnej ceremonii musi być wykonana przed innymi. Zadaniem ucznia jest prawidłowe zaplanowanie ceremonii.

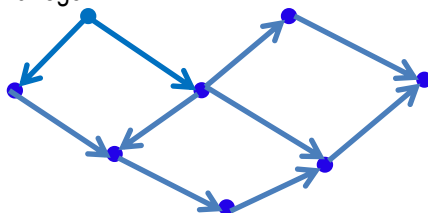


Rysunek 6. Przykładowy schemat dla czynności ceremonii

Jeśli strzałka prowadzi od jednej czynności do drugiej, to znaczy, że druga czynność nie może być wykonana przed pierwszą. Aby otrzymać rozwiązanie

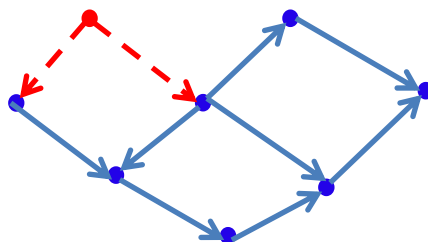
³ Zadanie „Ceremonia”, IX Konkurs Informatyczny Bóbr, rok 2014, poziom JUNIOR

upraszczamy cechy obiektów i tworzymy abstrakcyjny model tego problemu w postaci grafu skierowanego.



Rysunek 7. Model grafu dla schematu z rys 6.

Wierzchołki grafu odpowiadają poszczególnym czynnościom, a łuki grafu pokazują, która z czynności powinna być wykonana przed innymi. Łatwo zaobserwować, że w rozważanym zadaniu jako pierwsza może być wykonana tylko ta czynność, dla której do reprezentującego ją wierzchołka nie wchodzi żadne łuki. Może to być zatem tylko *pieśń*. Jeśli zostanie ona wykonana, jako kolejne mogą odbyć się czynności na które wskazywała, o ile nie wskazują na nie inne czynności. Mogą być także wykonane inne czynności, do których nie wchodzi żadne łuki (wierzchołki o stopniu wejściowym równym zero). Po wykonaniu pieśni usuwany z grafu wierzchołek odpowiadający tej czynności wraz z wychodzącymi z niej łukami (rys. 8).



Rysunek 8. Graf ceremonii z usuniętym wierzchołkiem i łukami odpowiadającymi pierwszej czynności (zaznaczone przerywaną linią)

W wyniku usunięcia otrzymujemy dwa nowe wierzchołki o stopniu wejściowym równym zero. Wybieramy dowolny z takich wierzchołków i powtarzamy postępowanie aż do usunięcia ostatniego wierzchołka grafu odpowiadającego ostatniej czynności ceremonii. Jednym z rozwiązań tego zadania jest następująca kolejność czynności:

- Pieśń*
- Odegranie bębnow*
- Długie przemówienie*
- Występ taneczny*
- Sygnal trąbki*

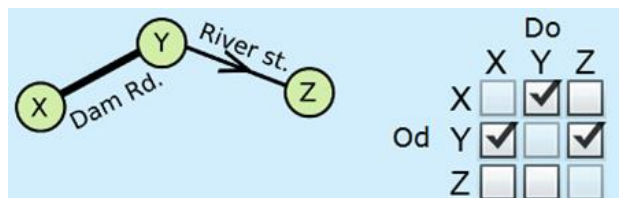
Ogłoszenie zwycięzcy
Sztuczne ognie
Podziękowanie wszystkim

Analizując powyższe zadanie uczniowie odkrywają algorytm porządkowania czynności nazywany **sortowaniem topologicznym**. To bardzo ważny algorytm mający szerokie zastosowania – możemy za jego pomocą określać kolejność czynności wykonywanych w życiu codziennym i w pracy, np. podczas ubierania się, podczas procesu produkcji, budowy i wszędzie tam, gdzie kolejność postępowania nie jest przypadkowa. Należy pamiętać, że porządek topologiczny można określić, jeśli graf skierowany nie zawiera cykli. W zależności od etapu edukacyjnego, na którym znajdują się uczniowie, możemy zapisać omówiony algorytm słownie, za pomocą schematu blokowego lub w wybranym języku programowania. Ostatni sposób wymaga jednak znajomości programowania takich abstrakcyjnych struktur danych, za pomocą których mogą być opisywane grafy.

6. Przygotowanie do programowania abstrakcyjnych struktur danych

Dobór abstrakcyjnych struktur w celu przechowywania danych wpływa na złożoność obliczeniową algorytmu. Przekonują się o tym często uczniowie startujący w olimpiadach i konkursach informatycznych. Bardzo ważna jest zatem znajomość tych struktur i umiejętne ich dobieranie. Ponieważ struktury te mogą mieć skomplikowaną konstrukcję, zaimplementowanie ich wymaga zaawansowanego myślenia algorytmicznego, którego kształtowanie jest długotrwałym procesem. Ważne jest zatem przygotowanie do rozumienia tych struktur od najmłodszych lat, by z czasem przejść do etapu ich programowania. Ciekawe zadania, które w prosty sposób realizują to przygotowanie, pojawiały się już kilka razy wśród zadań konkursowych.

Rysunek 9 towarzyszył jednemu z nich⁴. W zadaniu podano plan dróg w wiosce bobrów oraz zapis układu tych dróg w tabeli.

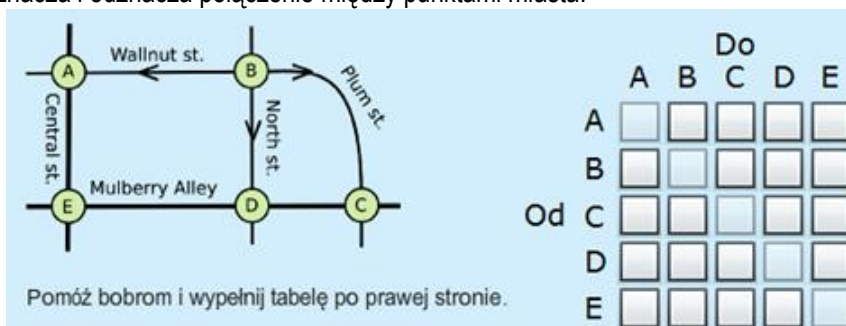


Rysunek 9. Przykładowy plan dróg wioski i zapis ich układu w tabeli

⁴ Zadanie „Drogi bobrów”, IX Konkurs Informatyczny Bóbr, rok 2014, poziom JUNIOR

Podobny zapis dróg bobry chcą wprowadzić w mieście, w którym plan dróg jest bardziej złożony.

Na podstawie przykładowego planu dróg wioski i zapisu jego układu, uczeń musi wywnioskować jaki zapis układu dróg będzie miało miasto. Zadanie ma charakter interaktywny stanowiąc tym samym pewien rodzaj zabawy, w której uczeń samodzielnie dochodzi do prawidłowego rozwiązania – kolejne kliknięcie w daną kratkę zaznacza i odznacza połączenie między punktami miasta.



Rysunek 10. Przykładowy plan dróg miasta i tabela do zapisu ich układu

Przedstawiony tu zapis układu dróg w tabeli odpowiada abstrakcyjnej strukturze danych, jaką jest macierz sąsiedztwa grafu. Może ona być zapisana w dwuwymiarowej tablicy o liczbie kolumn i wierszy równej liczbie wierzchołków grafu. Jeśli istnieje połączenie z wierzchołka i do wierzchołka j , to w polu tablicy o współrzędnych (i, j) znajduje się wartość 1 (prawda), jeśli takie połączenie nie istnieje, znajduje się tam wartość 0 (fałsz).

7. Odkrywanie algorytmów

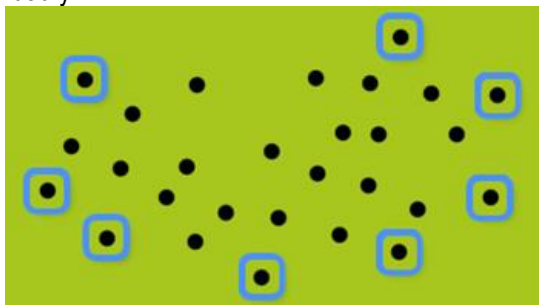
Interaktywność zadań uatrakcyjnia proces odkrywania algorytmu. W takich zadaniach uczeń ma najczęściej możliwość podejmowania wielu prób rozwiązania, może zastosować metodę prób i błędów dochodząc ostatecznie do prawidłowego rozwiązania. Należy jednak zwrócić uwagę, aby nie był to jedyny sposób odkrywania algorytmów przez uczniów. Ważne jest wcześniejsze zastanowienie się na rozwiązaniem, rozrysowanie sytuacji problemowej np. na kartce. Takie działania minimalizują liczbę nieudanych prób rozwiązania.

W jednym z zadań konkursowych⁵ bobry chcą ogrodzić wioskę, aby zabezpieczyć ją przed szkodami wyrządzanymi przez zwierzęta żyjące w pobliskim lesie. Bobry znane ze swej oszczędności chcą wykonać jak najkrótsze ogrodzenie, by

⁵ Zadanie „Ogrodzenie”, X Konkurs Informatyczny Bóbr – Próba, rok 2016, poziom SKRZAT

zapłacić za nie jak najmniej pieniędzy. Uczeń ma do dyspozycji plan domów wioski, na którym ma zaznaczyć domy, które będą ostatecznie wierzchołkami ogrodzenia.

Rozwiązanie tego problemu można uzyskać posługując się modelem rzeczywistym. W tablicy korkową wbijamy pinezki symbolizujące domy. Próbujemy następnie otoczyć nitką wszystkie z nich. Pinezki rozpinające nitkę stanowią wierzchołki szukanego wielokąta, a tym samym – wracając do zadania – wyznaczają ogrodzenie szukane przez bobry.



Rysunek 11. Plan domów wraz z zaznaczonym rozwiązaniem

W tle zadania drzemie znany problem informatyczny szukania wypukłej otoczki danego zbioru punktów. Sugerowane tu rozwiązanie przebiega podobnie, jak w algorytm Jarvisa nazywanym również algorytmem owijania prezentów.

8. Modele abstrakcyjne a testowanie rozwiązań

Jednym ze sposobów sprawdzenia poprawności odkrytego algorytmu jest przetestowanie realizującego go programu na odpowiednio dobranym zbiorze danych.

Wśród zadań konkursowych można znaleźć takie, które w przyspieszonym tempie każą wymyślić algorytm i potem go zaprogramować⁶. Są to najtrudniejsze z zadań, gdyż wymagają przejścia przez wszystkie etapy rozwiązywania problemu w krótkim czasie.



Rysunek 12. Przykładowy wzór do zaprogramowania

⁶ Zadanie „Skopiuj wzór”, X Konkurs Informatyczny Bóbr, rok 2015, poziom SKRZAT

Celem rozważanego zadania jest zaprogramowanie wzoru identycznego z podanym wyżej. Zanim uczeń zacznie tworzyć program powinien przejść przez etap przeanalizowania wzoru, aby wychwycić w nim sekwencje, które powtórzone odpowiednio wiele razy doprowadzą do narysowania wzoru identycznego.

W zadaniu uczeń ma do dyspozycji określone z góry instrukcje i powinien przeciągnąć wybrane z nich w puste miejsca tak, aby ich wykonanie powtórzone sześć razy dało prawidłowe rozwiązanie.



Rysunek 13. Instrukcje dostępne przy programowaniu wzoru z zadania

Zadanie daje możliwość wykonania (testowania) ułożonego programu. Uczeń obserwuje, jakie wykonał błędy i może sukcesywnie poprawiać swój program.

9. Podsumowanie

Umiejętność budowania abstrakcyjnych modeli ułatwia rozwiązywanie problemów. Sam program jest abstrakcyjnym zapisem czynności, które ma wykonać komputer według znalezionej algorytmu. W świecie pełnym technologii niezwykle ważna jest umiejętność abstrakcyjnego myślenia po to, by te algorytmy w nim odkrywać.

Algorytmika, czyli nauka o algorytmach, jako słowo po raz pierwszy pojawiła się w książce Davida Harela, *Rzecz o istocie informatyki* [1]. Według autora algorytmika jest istotą informatyki o charakterze ponadczasowym i stanowi podstawy tej dziedziny. Algorytm jest pojęciem ogólnym przedstawiającym w sposób abstrakcyjny opis wykonywanego działania. Również komputer ma swój model abstrakcyjny. Model ten nazywany jest Maszyną Turinga (Alan M. Turing, 1936). Na Maszynie Turinga można wykonać każdy algorytm, wystarczy zadziałać na niej zgodnie z odpowiadającym sytuacji problemowej abstrakcyjnym diagramem stanów.

Literatura

1. Harel D., *Rzecz o istocie informatyki*, WNT, Warszawa 1992.

2. Jaszuńska J., Wieże Hanoi, *Delta* 2/2016, <http://www.deltami.edu.pl>
3. Konkurs Informatyczny Bóbr, <http://bobr.edu.pl>, ostatni dostęp 25 lutego 2017